Tight Graphs with respect to Subsets of Width 2 (Algebraic Combinatorics)

数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 128-137

Tight Graphs with respect to Subsets of Width 2

Rie Hosoya (細谷 利恵)*
joint work with Hiroshi Suzuki (鈴木 寛)

International Christian University (国際基督教大学)

1 Introduction

距離正則グラフの固有値とその部分グラフの固有値との結びつきについて考えたい. 但し, 部分グラフが「きれい」に埋め込まれているという前提の下で, である. ここで言う「きれい」とは, おおもとのグラフとその部分グラフのべき等元の間にある対応が成立することをいう.

この稿で使う記法を以下に挙げる. [1] 及び [2] とほぼ同様の記法を用いている.

- $\Gamma = (X, R)$: 単純連結グラフ.
- X : 頂点集合. R : 辺集合.
- $\partial(x, y)$: 2 頂点 x, y 間の距離, i.e., x と y を結ぶ最短経路の長さ.
- $D := \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in X\}$: Γ の直径.
- $\Gamma_i(x) := \{y \in X \mid \partial(x, y) = i\}$. $\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$. $(x \in X.)$
- $k_i = k_i(x) := |\Gamma_i(x)|$. $k = k(x) = k_1(x)$: 頂点 x の次数. $(x \in X.)$

Definition 1.1 $\Gamma = (X, R)$ は次数 $k(x)$ が頂点 x の選び方によらず一定になるとき正則グラフであるという.

Definition 1.2 $\Gamma = (X, R)$ は次の条件を満たすとき距離正則グラフ であるという: 任意の i $(i = 0, 1, \ldots, D)$, 及び任意の距離 i の 2 点 x, y に対して

$$c_i := |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)|,$$

$$a_i := |\Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)|,$$

$$b_i := |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)|$$

が i のみによって定まる.

---

*E-mail: hrie@nt.icu.ac.jp

この稿では以下, Γ を直径 D が 3 以上の距離正則グラフと仮定する.

頂点集合 X の部分集合 Y に対して次を定義する.

- $\Delta(Y) := (Y, R|_{Y\times Y})$: Y 上に制限された部分グラフ.
- $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(Y) := \max\{\partial(y,y') \mid y, y' \in Y\}$: Y の **width**.

Example 1.1 $Y = \Gamma(x), x \in X \Rightarrow \boldsymbol{w}(Y) = 2$.

$|X|$ 次正方行列 A_i を次のように定義する:

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x,y) = i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

但し, x, y は X の元, i は $0 \le i \le D$ とする.
A_1 を単に A と書き, Γ の隣接行列と呼ぶ.

同様に, 部分集合 Y に対して, $\tilde{A}_i$ を定義する:

$$(\tilde{A}_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x,y) = i \text{ and } x, y \in Y, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

但し, x, y は X の元, i は $0 \le i \le D$ とする.
$\tilde{A}_1$ を単に $\tilde{A}$ と書き, Γ の Y に関する隣接行列と呼ぶ. 明らかに次が成立:

$$\tilde{A}_j = 0 \text{ if } j > \boldsymbol{w}.$$

A の相異なる固有値を次のように並べる:

$$\theta_0(=k) > \theta_1 > \cdots > \theta_D.$$

$\tilde{A}$ の固有値を次のように列挙する:

$$\eta_0 \ge \eta_1 \ge \cdots \ge \eta_{|Y|}.$$

η_i を Γ の Y に関する局所固有値と呼ぶことにする. ここでは部分グラフ $\Delta(Y)$ として次数 κ の正則グラフのみを扱うので $\eta_0 = \kappa$ が成り立つ. η_0 のことを自明な局所固有値と呼ぶことにする.

$V = \boldsymbol{C}^X$ とする. V_i, E_i, $\tilde{V}$, $\tilde{V}_i$, $\tilde{E}_i$ を次のように定める:

- V_i : A の固有値 θ_i に関する固有空間.
- E_i : V から V_i への射影行列.

- $\tilde{V} := \{v \in V \mid (v)_x = 0 \text{ if } x \in X - Y.\}$.
- $\tilde{V}_i$: $\tilde{A}$ の固有値 η_i に関する局所固有空間.
- $\tilde{E}_i$: $\tilde{V}$ から $\tilde{V}_i$ への射影行列.

$\mathcal{M} := \mathrm{Span}(A_0, A_1, \ldots, A_D)$ は **Bose-Mesner** 代数と呼ばれる半単純可換代数となることが知られており, $\{E_0, E_1, \ldots, E_D\}$ は原始べき等元からなる基底となる.

距離正則グラフ Γ の固有値とその部分グラフ $\Delta(Y)$ の固有値の間の対応を探るにあたり, 「きれい」な埋め込みの例として次の例を見てみよう.

Example 1.2 $\Gamma = J(2D, D)$: *the Johnson graph.* $Y = \Gamma(x)$, $(x \in X)$.
このとき次が成立:

$$E_1\tilde{E}_2 = 0, \quad E_D\tilde{E}_1 = 0. \quad \cdots (*)$$

上の例に現れる性質 $(*)$ は Γ が tight グラフになる条件と本質的に一致している. tight グラフは A. Jurišić, J. Koolen, P. Terwilliger らによって定義されたもので, Y としては $\Gamma(x)$ のみを考えている. しかし, $Y \neq \Gamma(x)$ でありながら Γ が Y に関して tight グラフになっている例がある.

Example 1.3 $\Gamma = H(D, q)$: *the Hamming graph.* $Y = H(2, q)$.
このとき次が成立:

$$E_1\tilde{E}_2 = 0, \quad E_D\tilde{E}_1 = 0.$$

上の例では Y は Γ において完全正則符号 (completely regular code) と呼ばれるものになっている (完全正則符号については同研究集会での吉田瞳氏や円田洋一氏の結果を参照されたい).

この例からわかるように条件 $(*)$ を定義とすれば, tight グラフは一般の Y に拡張できる. それによって完全正則符号など様々な部分集合を扱うことが可能になる. しかし, 条件 $(*)$ は $w(Y) = 2$ の場合にしか適用できないことがわかっている. そこで, 一般の $w(Y)$ に対して, 条件 $(*)$ にあたるものを求めてみたい.

2 Polynomials

距離正則グラフ Γ に対して次のような多項式を定義する.

Definition 2.1 多項式 $v_0(t), v_1(t), \ldots, v_D(t), v_{D+1}(t) \in R[t]$ を次を満たすように定める:

- $v_0(t) = 1$.
- $tv_i(t) = b_{i-1}v_{i-1}(t) + a_iv_i(t) + c_{i+1}v_{i+1}(t)$,
  但し, $v_{-1} = 0, c_{D+1} = 1$.

帰納法より, $v_i(t)$ の次数が i であることがわかる.

Definition 2.2 Y を X の部分集合とする. ベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \tilde{V}$ に対して, 多項式 $\rho_{\boldsymbol{v}}(t) \in \boldsymbol{R}[t]$ を次のように定義する:

$$\rho_{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{1}{|X|}\sum_{j=0}^{D} \frac{{}^t\boldsymbol{v}A_j\bar{\boldsymbol{v}}}{{}^t\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}}\frac{v_j(t)}{k_j}.$$

定義より, $\boldsymbol{v}$ を局所固有ベクトル, 即ち, $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_D$ の共通固有ベクトルとすれば, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は Y に関する局所固有値によって定まる多項式であることがわかる. また, 次の性質が成り立つ:

$$\deg\rho_{\boldsymbol{v}} \leq \boldsymbol{w}(Y).$$

Remarks. 上の性質から $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は最大で $\boldsymbol{w}(Y)$ 個の根をもつことがわかる.

Example 2.1 $\Gamma = J(8,3)$. $Y = \Gamma_3(x) = J(5,2)$ $(x \in X)$.
Γ の固有値:

$$\theta_0 = 15, \theta_1 = 7, \theta_2 = 1, \theta_3 = -3,$$

Γ の Y に関する局所固有値:

$$\eta_0 = 6, \eta_1 = 1, \eta_2 = -2.$$

(*i*) $\boldsymbol{v}_1 \in \tilde{V}_1 : \eta_1 = 1$ に関する局所固有ベクトル.

$$\rho_{\boldsymbol{v}_1}(t) = -\frac{30}{7}(t-(-5))(t-15).$$

$\rho_{\boldsymbol{v}_1}$ は固有値 θ_0 を根にもつ.

(*ii*) $\boldsymbol{v}_2 \in \tilde{V}_2 : \eta_2 = -2$ に関する局所固有ベクトル.

$$\rho_{\boldsymbol{v}_2}(t) = \frac{15}{7}(t-7)(t-15).$$

$\rho_{\boldsymbol{v}_2}$ は固有値 θ_0, θ_1 を根にもつ.

上の例では, 局所固有値によって定まる多項式 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ がグラフ全体における固有値を根にもつという面白いことが起こっている. 実は, 次のような関係が成り立っている. というより, 次の関係を満たすように多項式 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は定義された.

Proposition 2.1 $v \neq 0 \in \tilde{V}$ に対して次が成立: $i = 0, 1, \ldots, D$ に対して,

$$\frac{||E_i \boldsymbol{v}||^2}{||\boldsymbol{v}||^2} = m_i \rho_{\boldsymbol{v}}(\theta_i).$$

但し, $m_i = rankE_i$.

Remarks. 特に注意したいのは,

$$\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta_i) \geq 0.$$

ということである. $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は固有値上では 0 以上になることがわかる.

Corollary 2.2 次は同値:

(i) $\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta_i) = 0$ *for all* $\boldsymbol{v} \in \tilde{V}_j$.

(ii) $E_i \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *for all* $\boldsymbol{v} \in \tilde{V}_j$.

(iii) $E_i \tilde{E}_j = 0$.

これにより, グラフ全体の固有値と局所固有値の間の対応を多項式 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ の根の値の問題に帰着させることが出来る. 多項式 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は任意の width に対して定義可能であるから, tight グラフの条件 $(*)$ を任意の width の場合に拡張するための準備ができたわけである.

上の Remarks において, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は固有値上では 0 以上になると述べた. では, $\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta_i)$ の値がちょうど 0 になる, 即ち, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ が固有値を根に持つとしよう. このとき, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ の次数を考慮すれば, 最大で $\boldsymbol{w}(Y)$ 個の固有値が根になる可能性がある. 最大, つまり, $\boldsymbol{w}(Y)$ 個の固有値を根にもつベクトル $\boldsymbol{v}$ を tight ベクトルと呼ぶ. tight ベクトルと条件 $(*)$ との関係を次節で確認し, tight グラフの厳密な定義を行いたい.

3 Tight Graphs

Example 3.1 $\Gamma = H(3,3)$. $Y = H(2,3)$.
Γ の固有値:

$$\theta_0 = 6, \theta_1 = 3, \theta_2 = 0, \theta_3 = -3,$$

Γ の Y に関する局所固有値:

$$\eta_0 = 4, \eta_1 = 1, \eta_2 = -2.$$

(i) $\boldsymbol{v}_1 \in \tilde{V}_1 : \eta_1 = 1$ に関する局所固有ベクトル.

$$\rho_{\boldsymbol{v}_1}(t) = -\frac{16}{9}(t - (-3))(t - 6).$$

$\rho_{\boldsymbol{v}_1}$ は固有値 θ_0, θ_3 を根にもつ.

(ii) $\boldsymbol{v}_2 \in \tilde{V}_2 : \eta_2 = -2$ に関する局所固有ベクトル.

$$\rho_{\boldsymbol{v}_2}(t) = \frac{8}{9}(t-3)(t-6).$$

$\rho_{\boldsymbol{v}_2}$ は固有値 θ_0, θ_1 を根にもつ.

上の例の (i), (ii) からわかることは, まず, $\rho_{\boldsymbol{v}_i}$ がいずれも θ_0 を根にもつことである. 実は, $\boldsymbol{v}_i$ として非自明な局所固有値に関する固有ベクトル（非自明な局所固有ベクトル）を選べばこれは常に成り立つ. 次に, 多項式が θ_D, θ_1 を根にもつことから、

$$E_D\tilde{E}_1 = 0, E_1\tilde{E}_2 = 0,$$

即ち, 最初に見た tight グラフの条件 (*) が導かれる. これは, 常に成り立つわけではない (Example 2.1 (i) を見よ). そこで, Example 3.1 における $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ のようなベクトルを tight ベクトルと呼ぶことにすれば, tight グラフは, 全ての非自明な局所固有ベクトルが tight ベクトルになるようなグラフとして定義出来る. これを一般的に定式化すると次のようになる.

Definition 3.1 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \in \tilde{V}$ は次の条件を満たすとき ***tight***ベクトルであるという:

$$|\{\theta \in \Theta \mid \rho_{\boldsymbol{v}}(\theta) = 0\}| = \boldsymbol{w}(Y),$$

即ち, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ が $\boldsymbol{w}$ 個の相異なる固有値を根にもつ. 但し, $\Theta := \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_D\}$ とする.

明らかに次が成り立つ: $\boldsymbol{v}$ が tight ベクトルならば,

$$\deg \rho_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w}(Y).$$

tight ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\rho_{\boldsymbol{v}}$ が最大限に固有値を根に持つようなベクトルである. そして tight ベクトルを用いて tight グラフが次のように定義される:

Definition 3.2 $\Delta(Y)$ を正則グラフとする. 次の条件が成り立つとき, Γ は Y に関して ***tight*** グラフ† であるという: $\tilde{V} \cap \tilde{V}_0^{\perp}$ が *tight*ベクトルで張られる.

以上の定義から, Example 2.1 は $\boldsymbol{v}_1$ が tight ベクトルではないので, Y に関して tight グラフにはならない. 一方, Example 3.1 は Y に関して tight グラフになる.

$\mathbf{1}_Y$ を Y の特性ベクトル（Y 上の成分が全て 1 で他は 0 のベクトル）とする. $\tilde{V} \cap \tilde{V}_0^{\perp}$ の元 $\boldsymbol{v}$ は $\mathbf{1}_Y$ と直交するベクトルであるから, $E_0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たしている. 従って, $\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta_0) = 0$ が成立. 即ち, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は常に自明な固有値を根にもつ. ちなみに, $\mathbf{1}_Y$ が tight ベクトルであることは上の定義では要求されていない. しかし, $\mathbf{1}_Y$ が tight であるか否かは実は完全正則符号との関連で重要であるので後で考察する.

† 講演の際は単に「tight グラフ」と呼んでいたが, 「Y に関して」という部分が重要であるので本稿ではこのように改めた. これについては講演後, 東京女子大の吉荒聡先生からも御指摘を頂戴した.

4 The Case of Width 2

この節では width 2の部分集合 Y に関して tight グラフの性質を考察する.

4.1 Local Eigenvalues

Proposition 4.1 Y を連結グラフとする. 次は同値:

(*i*) Γ が Y に関して *tight* グラフ.

(*ii*) 非自明な局所固有値が丁度2個存在して, それらは $\tilde{\theta_1}, \tilde{\theta_D}$ と一致する. ここで,

$$\tilde{\theta} := -1 - \frac{b_1}{1+\theta}$$

とする.

Sketch of the Proof.) $(i) \Rightarrow (ii)$ $\boldsymbol{v} \in \tilde{V} \cap \tilde{V_0}^{\perp}$ を非自明な局所固有ベクトルとする. 仮定より, $\boldsymbol{v}$ は *tight* ベクトル.

• 一般に, 連結グラフの相異なる固有値の個数は (直径) + 1 以上あることが知られているので, 非自明な局所固有値は2個以上ある.

• また, 非自明な固有値 θ に対して,

$$\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta) = 0 \textit{ if and only if } \eta = -1 - \frac{b_1}{1+\theta}.$$

が成り立つ. η は $\boldsymbol{v}$ に対応する局所固有値 ($(ii) \Rightarrow (i)$ はこれより明らか).

• 今, $deg\rho_{\boldsymbol{v}} = 2$ であるから, $\rho_{\boldsymbol{v}}$ は相異なる二つの根をもつが, 一つは θ_0 であり, もう一方を θ とすれば, $\tilde{\theta}$ が非自明な局所固有値を与える.

• ここで, 二次関数 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ の性質として, 次のことに注意する:

$$\rho_{\boldsymbol{v}}(\theta) \geq 0 \textit{ for all } \theta \in \Theta.$$

• 以上のことから, 二次関数の初等的な議論により θ_0 の他の根としてとり得る値は, θ_1 又は θ_D しかないことがわかる. 非自明な局所固有値は2個以上なければいけないので, $\tilde{\theta_1}, \tilde{\theta_D}$ 共に非自明な局所固有値となる. □

この定理の興味深い点は, 非自明な局所固有値の値が初等的な二次関数のグラフの性質から類推できる点である. では, 一般の *width* の場合にはどうなるであろうか? これは今後の課題である.

4.2 The Fundamental Inequality

引き続き, Y を $w(Y)=2$ で $\Delta(Y)$ が次数 κ の正則グラフとする. また, $|Y|=l$ とする.

一般に, Γ と部分集合 Y に対して, 局所固有値 η は

$$\tilde{\theta_1} \leq \eta \leq \tilde{\theta_D}$$

を満たす. 従って,

$$\sum_{\eta \neq \kappa}(\eta - \tilde{\theta_1})(\eta - \tilde{\theta_D}) \leq 0$$

が成立. これは, 次の不等式と同値である:

$$(\theta_1 + 1 + \frac{b_1}{\kappa+1})(\theta_D + 1 + \frac{b_1}{\kappa+1}) + \frac{l\kappa b_1^2}{(\kappa+1)^2(l-\kappa-1)} \geq 0. \cdots (**)$$

特に, 上の不等式 $(*)$ において等号が成立することと Γ が Y に関して *tight* グラフになることとが同値である.

Proposition 4.2 次は同値:

(*i*) Γ は Y に関して *tight* グラフ.

(*ii*) 不等式 $(**)$ において等号が成立.

$l=k, \kappa=a_1$ という対応により, $Y=\Gamma(x)$ の場合の不等式 $(**)$ が得られる. 実は, *[3]* では, この *Proposition* により *tight* グラフを定義している. 実際この定義の方が, *"tight"* という感じがよく出ている.

4.3 Strongly Regularity of $\Delta(Y)$

引き続き, Y を $w(Y)=2$ で $\Delta(Y)$ が次数 κ の正則グラフとする.

$\Delta(Y)$ が Γ に「きれいに」埋め込まれているということから, $\Delta(Y)$ も距離正則グラフになることが期待される. 実際, *width* 2 の場合にはこのことが成り立つ.

Lemma 4.3 Γ を連結グラフとする. 次は同値:

(*i*) Γ は互いに異なる 2 個の非自明な固有値をもつ.

(*ii*) Γ は強正則グラフ, 即ち, $D=2$ の距離正則グラフになる.

上の *Lemma* と, *tight* グラフの局所固有値が丁度 2 個あることから, 次の定理を得る:

Theorem 4.4 $\Delta(Y)$ を $w(Y)=2$ の連結グラフとする. 次は同値:

(*i*) Γ は Y に関して *tight* グラフ.

(*ii*) $\Delta(Y)$ は強正則グラフで, 非自明な局所固有値 $\tilde{\theta_1}, \tilde{\theta_D}$ をもつ.

上の定理では $\Delta(Y)$ が連結の場合しか扱っていない。ちなみに、$\Delta(Y) =$*coclique* の場合は Γ が *bipartite* グラフのときまたそのときに限り Γ は Y に関して *tight* グラフになることが知られており, $\Delta(Y)$ が非連結で（広い意味の）強正則グラフの例となっている.

5 Tightness of $\mathbf{1}_Y$

Y の特性ベクトル $\mathbf{1}_Y$ が *tight* ベクトルになるとき, 多項式 $\rho_{\mathbf{1}_Y}$ の根の値と Γ の固有値の関係について考えたい. 次の条件に注意する:

- 任意の固有値 θ に対して,

$$\rho_{\mathbf{1}_Y}(\theta) \geq 0.$$

- $\rho_{\mathbf{1}_Y}$ は自明な固有値を根にもたない, *i.e.*,

$$\rho_{\mathbf{1}_Y}(\theta_0) \neq 0.$$

$w(Y) = 2$ のときには, $\mathbf{1}_Y$ が *tight* ベクトルならば $\rho_{\mathbf{1}_Y}$ の根は $\theta_i, \theta_{i-1} (2 \leq i \leq D)$ となる. θ_0 を根にもたないことが影響して根の値を決定できない.

Example 5.1 下表は $w(Y) = 2$ で $\mathbf{1}_Y$ が *tight* ベクトルになる例である:

Γ	$\Delta(Y)$	*roots of* $\rho_{\mathbf{1}_Y}$	*tightness of* Γ
$H(D,q)$	$H(2,q)$	$\theta_{D-1},\ \theta_D$	*Yes*
$J(6,3)$	$J(5,3)$	$\theta_2,\ \theta_3$	*No*
$J(6,3)$	*Petersen graph*	$\theta_1,\ \theta_2$	*Yes*
$J(7,3)$	$(7,3,1)$-*design*	$\theta_1,\ \theta_2$	*No*
dodecahedron	*pentagon*	$\theta_3,\ \theta_4$	*Yes*

表中の例の中には Γ が Y に関して *tight* グラフになっているものもあれば, そうでないものもある. また, これだけでは $\rho_{\mathbf{1}_Y}$ の根の規則性も見出せない. ところが, 表中の例全てに共通した性質がある. それは Y が Γ の完全正則符号となっている, ということである. 一般に, 次の性質が成り立っている:

Proposition 5.1 *[4]* τ を $\tau + w(Y) = D$ を満たす Y の被覆半径とする. 次は同値:

(*i*) $\mathbf{1}_Y$ が *tight* ベクトル.

(*ii*) Y が完全正則符号.

このように, *tight*ベクトルは完全正則符号との関連からも興味深い.

尚, 本稿では詳細は述べないが, *tight*ベクトルは *Terwilliger*代数 $\mathcal{T}(Y)$ の理論と密接な繋がりがある. 実際, *[4]*には, *tight*ベクトル v で生成される $\mathcal{T}(Y)$-*module* は *thin module* になることが示されている.

本稿では *width* 2 のケースを中心に考察した. 今後, *width* が 3 以上や一般の場合について考えていきたい.

References

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, California, 1984.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[3] A. Jurišić, J. Koolen and P. Terwilliger, Tight distance-regular graphs, J. Alg. Combin. 12 (2000), 163-197.

[4] H. Suzuki, The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph, preprint.